ECUACIONES DE 1$^{\underline{ER}}$ GRADO

1. Igualdades, identidades y ecuaciones

Una igualdad es cualquier expresión matemática que contenga el signo =. En toda igualdad hay dos o más elementos que se comparan. Estos elementos se llaman ***miembros.*** Leyendo de derecha a izquierda los llamaremos 1$^{\underline{er}}$ miembro , 2$^{\underline{o}}$ miembro y así sucesivamente. Si únicamente se comparan dos elementos podemos también llamarlos miembro izquierdo o derecho, tomando como referencia el signo igual.

Igualdad con varios miembros: $2+1=3=5-2=4-1$. Este tipo de igualdades se han visto en las series de razones al estudiar la proporcionalidad numérica.

Igualdad con sólo dos miembros: 3x-1=2

Propiedades de las igualdades

a) Si en una igualdad sumamos o restamos la misma cantidad a ambos lados de la igualdad (miembros) la igualdad permanece.

$$a=b$$
$$a+k=b+k$$

b) Si en una igualdad multiplicamos o dividimos por la misma cantidad ambos miembros de la igualdad, ésta permanece.

$$a=b$$
$$a\cdot k=b\cdot k$$

Vamos a distinguir dos tipos de igualdades en función de la naturaleza de las entidades matemáticas que las formen:

Igualdades numéricas o aritméticas: son aquellas en las que únicamente intervienen números.

$$3\cdot 5=8+7$$

Igualdades algebraicas: son aquellas en las que intervienen números y letras

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$2x+1=5$$
$$x-y=1$$

En las igualdades algebraicas se llaman ***soluciones*** al conjunto de números que hacen cierta la igualdad, es decir, que *convierten la igualdad algebraica en igualdad numérica*.

En la igualdad algebraica $2x+1=5$ el valor $x=3$ no es una solución porque si sustituimos la x por 3 la igualdad numérica resultante no es cierta $2\cdot 3+1\neq 5$. Sin embargo, si hacemos $x=2$ la igualdad numérica resultante si que es cierta: $2\cdot 2+1=5$. El valor 2 es solución de la igualdad y en este caso no hay otra.

En la igualdad $x-y=1$ las posibles soluciones estarán formadas por parejas de valores (x,y).

Las parejas: (2,1); (3,2),(4,3),(5,4),...............,(10.001,10.002)..........., son soluciones de la ecuación. Tiene infinitas soluciones, pero, no todas las posibles parejas de números son solución. Por ejemplo, la pareja (0,3) no es solución de la ecuación , ya que $0-3\neq 1$

Si cogemos el ejemplo $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ podemos comprobar que todas parejas posibles de números (a, b) son soluciones de la igualdad.

Dentro de las igualdades algebraicas vamos a distinguir a su vez entre ***identidades*** y ***ecuaciones.***

Identidad es una igualdad algebraica que es cierta para cualquier valor que tomen las variables. Todos los productos notables son identidades.

. **Ecuación** es una igualdad algebraica que es cierta sólo para un conjunto finito de valores. Estos valores son las soluciones de la ecuación. Resolver una ecuación es buscar ese conjunto de valores.

Una ecuación es **entera** cuando las incógnitas no figuran en el denominador, en caso contrario se llama **fraccionaria**.

Una ecuación es **numérica** cuando en ella no aparecen más letras que las incógnitas, en caso contrario hablaremos de ecuaciones **literales**.

El **grado** de una ecuación entera con una incógnita es el mayor exponente de la incógnita.

2. Ecuaciones equivalentes. Principios de equivalencia.

Dos ecuaciones son equivalentes si tienen las mismas soluciones

Las ecuaciones:

$$2x-1=-3x-6 \qquad \text{y} \qquad -3x-3=0$$

son equivalentes porque tienen la misma solución $x=1$

a) $2\cdot(-1)-1=-3(-1)-6 \Rightarrow -3=-3$
b) $-3(-1)-3=0 \Rightarrow 0=0$

Para resolver una ecuación se obtienen ecuaciones más sencillas equivalentes a la original, hasta llegar a la ecuación $x = a$ en la que la solución, a, está explicita. Para obtener las sucesivas ecuaciones equivalentes se aplican los ***Principios de equivalencia.***

Los principios de equivalencia son una consecuencia inmediata de las propiedades de las igualdades numéricas. La relación entre igualdades numéricas y ecuaciones se patentiza en el hecho de que al sustituir en una ecuación la variable por un valor numérico, está se convierte en una igualdad numérica.

Para hacer la exposición más clara vamos a ir resolviendo la ecuación:

$$2x-3+x=4x+5+x$$

- **1$^{\underline{er}}$ Principio de equivalencia**

Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o resta la misma expresión algebraica, la ecuación resultante es equivalente a la anterior.

Consecuencias:

1) Si los dos miembros de una ecuación tienen dos términos iguales, y con el mismo signo, se pueden eliminar .
2) Si en una ecuación se pasa un término de un miembro al otro, cambiándolo de signo, la ecuación resultante es equivalente a la anterior. Esto, en lenguaje más coloquial, quiere decir que *"lo que está sumando pasa al otro lado restando y lo que esta restando pasa la otro lado sumando"*.

En la ecuación $2x-3+x=4x+5+x$ vamos a pasar las incógnitas a la izquierda y los números a la derecha aplicando el 1$^{\underline{er}}$ principio de equivalencia.

Pasamos $4x$ a la izquierda sumado a ambos lados $-4x$, el <u>opuesto</u> de $4x$:

$$2x-3+x-4x=4x+5+x-4x$$

Como la suma de opuestos es 0, (elemento neutro) $4x$ desaparece del miembro de la derecha y aparece en el de la izquierda con el signo cambiado. De aquí, la segunda consecuencia.

$$2x-3+x-4x=5+x+0$$
$$2x-3+x-4x=5+x$$

Ahora vamos a ver el porqué de la 1$^{\underline{a}}$ consecuencia. Seguimos pasando las incógnitas a la parte izquierda de la ecuación. Le toca el turno al término *x*. Lo hacemos desaparecer de miembro izquierdo sumado a ambos lados su opuesto $-x$

$$2x-3+x-4x-x=5+x-x$$
$$2x-3-4x+0=5+0$$
$$2x-3-4x=5$$

Como el término x también estaba en el miembro izquierdo, al sumar $-x$ desaparece totalmente. De aquí, la segunda consecuencia.

Para acabar con el proceso pasamos -3 a la derecha. El proceso es el mismo que con las incógnitas. Sumamos a ambos lados, su opuesto 3:

$$2x-4x-3+3=5-3$$
$$2x-4x+0=5-3$$
$$2x-4x=5-3$$

Ahora que tenemos las incógnitas a un lado y los números a otro. Agrupamos términos semejantes.

$$-2x=2$$

- **2º Principio de equivalencia**

> Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación por un número, o por una expresión algebraica no nula independiente de la incógnita, las ecuaciones son equivalentes.

Consecuencias:

1) Se pueden cambiar todos los signos de una ecuación, ya que equivale a multiplicar por -1
2) Dada una ecuación, con coeficientes racionales (denominadores), se puede transformar en otra con coeficientes enteros (sin denominadores), reduciéndolos a común denominador y multiplicando luego los dos miembros por ese denominador común.

Esta consecuencia nos permitirá eliminar denominadores

Un caso particular, pero muy frecuente, que permite finalizar ecuaciones o ahorrar pasos se puede enunciar así:

Si un número está multiplicando o dividiendo a todo un miembro de la ecuación puede pasar al otro lado del igual dividiendo o multiplicando respectivamente a todo el otro miembro.

Usando esto vamos a finalizar la ecuación que nos llevamos entre manos:

$$-2x=2$$

Para hacer desaparecer el -2 del miembro izquierdo, multiplicamos a ambos lados por el <u>inverso</u> de -2 que es $-\frac{1}{2}$. El producto de un número por su inverso es la unidad:

$$-\frac{1}{2}\cdot -2x = -\frac{1}{2}\cdot 2$$
$$1\cdot x = -\frac{1}{2}\cdot 2$$
$$x = -\frac{1}{2}\cdot 2$$
$$x = -1$$

Con esto hemos llegado a la ecuación equivalente a la original más sencilla posible, con la solución explicita.

$$x = -1$$

Ejemplo:

Eliminación de denominadores en $\frac{x-1}{2} - 3 = \frac{x+2}{3}$

Sacamos común denominador a todos los términos:

$$\frac{3(x-1)}{6} - \frac{18}{6} = \frac{2(x+2)}{6} \Rightarrow \frac{3(x-1)-18}{6} = \frac{2(x+2)}{6}$$

Multiplicamos a ambos lados por el denominador común 6:

$$6\cdot\frac{3(x-1)-18}{6} = 6\cdot\frac{2(x+2)}{6} \Rightarrow 3(x-1)-18 = 2(x+2)$$

Los denominadores han desaparecido.

Los paréntesis se eliminan por mera aplicación de la propiedad distributiva.

3. Ecuaciones de 1er grado con una incógnita

3.1. Resolución algebraica

Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita se pueden seguir los siguientes pasos:

1. Eliminación de paréntesis aplicando la propiedad distributiva.
2. Eliminación de los denominadores, reduciendo previamente a común denominador.
3. Trasposición de términos, pasando todas las incógnitas a un miembro y los números al otro
4. Reducción de términos semejantes.
5. Despejar la incógnita dividiendo ambos miembros por el coeficiente de la incógnita.

¡¡¡OJO!!!

Hay que tener mucho cuidado cuando hay un signo menos delante de una fracción. Este signo actúa con el numerador de la fracción como con un paréntesis. Cambia el signo de lo de dentro. Por esta razón conviene usar paréntesis al eliminar los denominadores. Sigue atentamente el ejemplo

Ejemplo:

$$\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{2}=\frac{4-2x}{5}$$

Sacamos común denominador:

$$\frac{10(x-2)}{30}-\frac{15(x-3)}{30}=\frac{6(4-2x)}{30}$$

Eliminamos denominadores usando paréntesis:

$$10(x-2)-15(x-3)=6(4-2x)$$

Eliminamos paréntesis:

$$10x-20-15x+45=24-12x$$

Transponemos términos:

$$10x-5x+12x=24-45+20$$

Agrupamos términos semejantes:

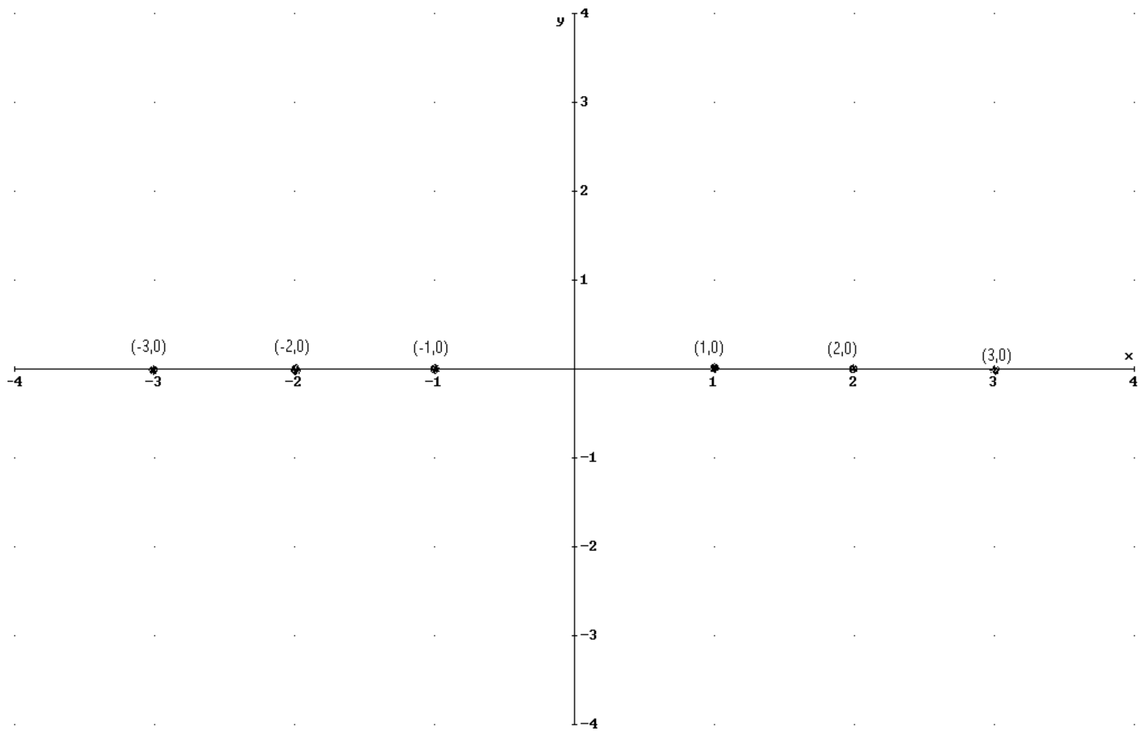
$$17x=-1$$

Despejamos la incógnita:

$$x=-\frac{1}{17}$$

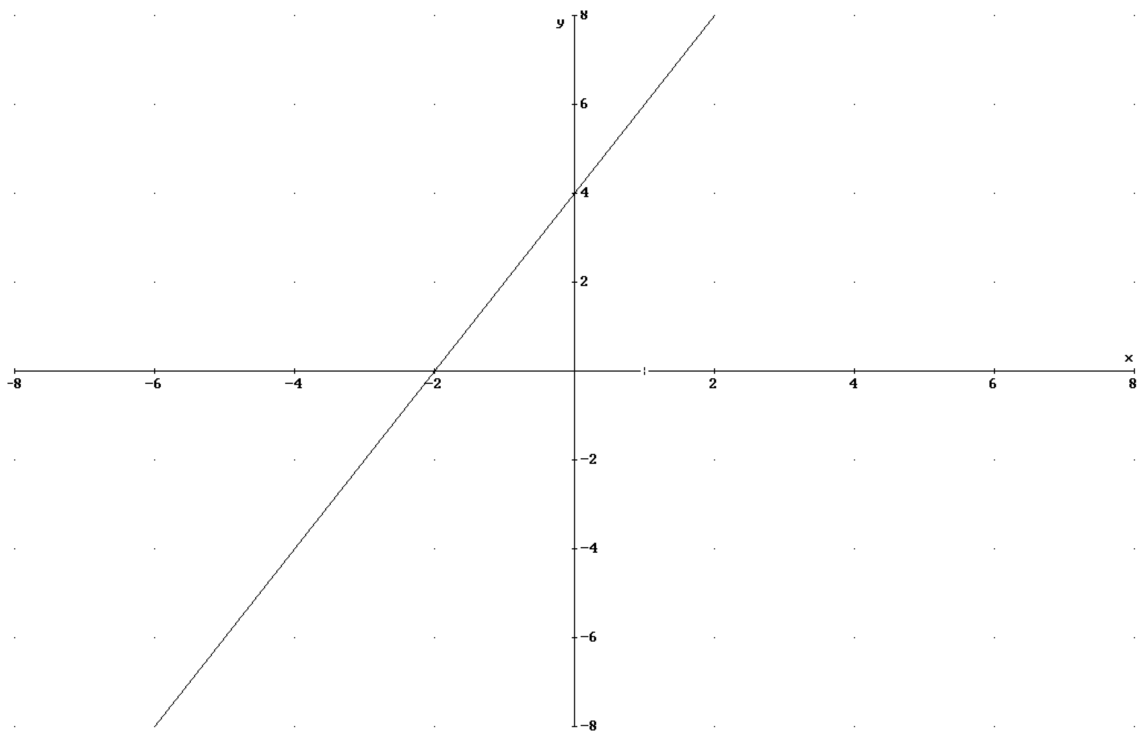
3.2. Resolución gráfica

Cualquier ecuación de 1er grado se puede escribir de la forma $ax + b = 0$. Una función polinómica de 1ergrado tiene la forma $y = ax + b$ o $f(x) = ax + b$. El punto de corte de la función $y = ax + b$ con el eje de abcisas ,eje X, será el punto que tenga como imagen el cero, ya que todo punto situado sobre este eje tiene como coordenada y el cero.



El punto de corte con el eje de abcisas tendrá, como coordenada *x* el resultado de la ecuación $ax + b = 0$, que es la solución de la ecuación de 1[er] grado.

Para resolver gráficamente la ecuación $2x + 4 = 0$, representamos la función $y = 2x + 4$. El punto de corte (-2,0) nos da la solución de la ecuación.



4. Problemas de ecuaciones de primer grado con una incógnita

Problemas de números y cifras:

1) Calcula un número cuya tercera parte sumada con el triple del mismo número de cómo resultado 40.
2) Busca un número, sabiendo que la diferencia entre su cuádruplo y la tercera parte del número dado menos 4 es triple de la suma de la mitad del número dado más 10.
3) Descompón el número 133 en dos partes tales que, al dividir la parte mayor por la menor, dé 4 de cociente y 8 de resto.
4) Halla dos números enteros consecutivos tales que la diferencia entre la tercera parte del mayor y la séptima parte del menor sea igual a la quinta parte del menor.
5) Halla un número de dos cifras cuya suma es 10 y tal que el doble de dicho número supera en una unidad al obtenido invirtiendo sus cifras.
6) Al invertir el orden de las dos cifras de un número, el número queda disminuido en 36 unidades. Sabiendo que dichas cifras suman 12, hallar dicho número.
7) Busca dos números consecutivos tales que, añadiendo al mayor la mitad del menor, el resultado excede en 13 a la suma de la quinta parte del menor con la onceava parte del mayor.
8) La razón de dos números consecutivos es ¾. Si se suman 10 unidades a cada uno de ellos, la razón es 11/14. ¿Cuáles son esos números?.
9) Descomponer el número 200 en 2 partes que están en la relación 2 a 3.
10) Si a los dos términos de la fracción 79/121 se les añade el mismo número, se obtiene una fracción equivalente a otra obtenida añadiendo ese número a los dos términos de 7/13. Calcula ese número.
11) De la mitad de un número se resta una unidad; de la tercera parte de la diferencia se resta una unidad; de la cuarta parte de la nueva diferencia se resta de nuevo una unidad y el resultado es una unidad. Halla el número.
12) La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es 573. ¿Cuáles son estos números?.
13) Dos números suman 37 y la diferencia de sus cuadrados es 111. Halla estos números.
14) Divide el número 68 en dos sumados de tal forma que la diferencia de sus cuadrados sea 816.

Problemas de edades:

15) Un hijo tiene 30 años menos que su madre y ésta tiene cuatro veces la edad de su hijo. ¿Qué edad tiene cada uno?
16) Un señor tiene 42 años y su hijo 10 años. ¿Dentro de cuantos años la edad del padre será el triple de la del hijo?.
17) Hace 2 años un padre tenía el triple de la edad de su hijo y dentro de 11 sólo tendrá el doble. Halla la edad que tienen ahora.
18) Una madre tiene 37 años y las edades de sus tres hijas suman 25 años. ¿Dentro de cuantos años las edades de las hijas sumaran la de la madre?.
19) La edad de un hijo es la quinta parte de la edad de su padre y dentro de 7 años el padre tendrá el triple de la edad de su hijo. Calculo las edades de cada uno.

20) Un padre tiene 6 veces la edad de su hijo, y la suma de las edades de los dos es 91 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?.
21) La edad de un padre es *a* y la edad de su hijo, *b*. ¿Dentro de cuantos años la edad del padre será *m* veces la edad del hijo?.
22) Un padre tiene 39 años y su hijo 15. ¿Cuántos años hace que la edad del padre sea el triple que la edad de su hijo?
23) Las tres cuartas partes de la edad de la madre de Carlos excede en 15 años a la edad de esté. Hace 4 años la edad de la madre era el doble de la de la hija. Hallar las edades de ambas.
24) Una señora tiene 60 años y su hijo la mitad. ¿Cuántos años hace que la madre tenía el triple de la edad del hijo?.

<u>Problemas de repartos</u>:

25) Tres socios se reparten 1.500.000 pts. Calcula lo que le corresponde a cada uno, si el primero ha de tener dos veces más que el segundo y éste tres veces más que el tercero.
26) Reparte 455.000 pesetas entre dos personas, de modo que la primera reciba los 2/5 de la segunda.
27) Un señor distribuye su capital de la siguiente manera: $\frac{1}{3}$ para sus herederos; los $\frac{3}{5}$ para un hospital y $\frac{1}{2}$ del resto para los pobres, quedándole todavía 200.000 pesetas. ¿Cuál era su capital?.
28) Tres jugadores ganan 310 pesetas. Si el segundo gana 30 pesetas menos que el primero, y el tercero doble que el segundo. ¿Cuánto ganó cada uno?.
29) Reparte 20.000 pesetas entre tres personas, de manera que la primera reciba 1000 pesetas más que la segunda, y ésta reciba 2000 pesetas más que la tercera.
30) Tres amigos juegan un décimo de lotería que resulta premiado con 6.000.000 pesetas. Calcula cuanto le corresponde a cada uno si el primero juega el doble del segundo y esté el triple del tercero.

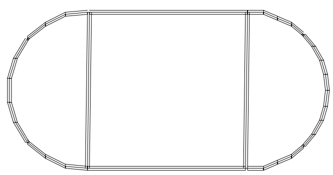
<u>Problemas de reducción a la unidad</u>. Fuentes y obreros :

El fundamento de estos problemas es que la parte de deposito que llena una fuente en una hora más la parte de depósito que llena la otra fuente da como resultado la parte de deposito que llenan juntas las dos fuentes.

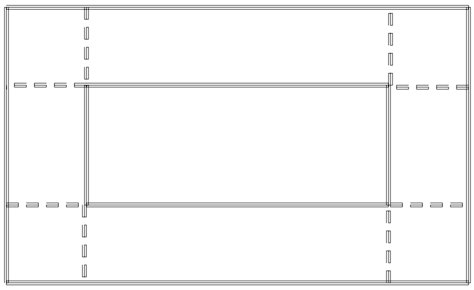
31) Un grifo tarda tres horas en llenar un depósito y otro tarda 2 horas en llenarlo. ¿Cuánto tiempo tardarán en llenarlo juntos? *Sol: 1h 12m*
32) Trabajando juntos dos obreros hacen un trabajo en 17 horas. ¿Cuánto tiempo tardarán en hacerlo por separado si uno es el doble de rápido que el otro?. *Sol: 25 h 30m y 51 h.*

<u>Problemas geométricos</u>:

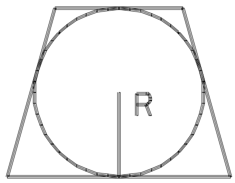
33) Si el lado de un cuadrado aumenta en 7 cm, su superficie aumenta en 301 cm^2. Halla el lado.
34) Si se aumenta la longitud de un cuadrado en 4 m y la anchura en 1,5 m, resulta un rectángulo cuya área es igual a la del cuadrado aumentada en 28 m^2 . Calcula el lado del cuadrado.
35) El perímetro de un triangulo isósceles es 180 cm. Cada uno de los lados iguales es 30 cm mayor que la base. ¿Cuánto mide cada lado?.
36) El perímetro de un rectángulo mide 38,4 m. Determina sus lados, sabiendo que el menor mide 7/9 de la longitud del mayor.
37) Halla los lados de un triángulo isósceles de 72 cm de perímetro sabiendo que la razón entre la base y uno de los lados iguales es de 2 a 3.
38) Calcula los ángulos de un triángulo sabiendo que uno es la mitad de otro y que el tercero es la cuarta parte de la suma de los dos primeros .
39) Un triangulo tiene 72 m de perímetro y es semejante a otro cuyos lados son 3 cm, 4 cm y 5 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del triángulo?.
40) En un triangulo rectángulo un cateto mide 24 cm y la hipotenusa mide 18 cm más que el otro cateto. Halla el perímetro y el área del triángulo.
41) Los radios de dos circunferencias concéntricas difieren en 24 cm y uno mide 5/7 de la longitud del otro. Calcula el área de la corona circular limitada por las dos circunferencias.
42) El perímetro de un trapecio isósceles mide 196 m y cada lado oblicuo mide 34 m. Halla las bases y el área del trapecio, sabiendo que una base mide 3/5 de la longitud de la otra.
43) Un reloj señala las tres. ¿A qué hora se superpondrán las manecillas?. *Sol: 3h 16m* $21\frac{9}{11}s$
44) Un reloj señala las 6 de la tarde . ¿A qué hora volverán a estar por primera vez las agujas del reloj en línea recta?
45) Una figura se compone de un cuadrado y de dos semicírculos externos al cuadrado y que tienen como diámetro dos lado opuestos. Determina el área de la figura sabiendo que su perímetro mide 41,12 (π=3,14).



46) Dos rectángulos están colocados uno dentro del otro, con los lados paralelos y a la misma distancia. Los lados del rectángulo mayor miden 24 y 36 cm, respectivamente. Determina los lados del menor sabiendo que es equivalente (igual área) a los cuadrados que resultan al prolongar sus lados hasta encontrar los lados del rectángulo mayor.



47) Un trapecio isósceles, cuya base menor mide la cuarta parte de la longitud de la base mayor, está circunscrito a una circunferencia. Determina los lados del trapecio sabiendo que el perímetro mide 96 cm.



Problemas de cinemática:

48) Las velocidades de dos móviles están en la relación de 4 a 3. El de mayor velocidad llega a la meta 3 horas antes que el otro. Halla los tiempos invertidos por cada uno d ellos.
49) Un automóvil sale de Madrid a una velocidad de 68 Km/h. Después de una hora y cuarto sale otro coche en la misma dirección y en el mismo sentido y lo alcanza 5 horas después. ¿Cuál es la velocidad del segundo coche?
50) Dos coches salen simultáneamente de 2 ciudades que distan entre si 600 Km. Si uno lleva una velocidad de 56 Km/h y el otro de 64 Km/h, y van en la misma dirección y en ,sentidos contrarios, ¿después de cuanto tiempo y a qué distancia de las dos ciudades se encontrarán?
51) De un punto salen dos personas , una en dirección Norte y otra en dirección oeste. La primera marcha a 6 Km/h y la otra a 8 Km/h. ¿Qué tiempo tardarán a estar uno de otro a 5 Km de distancia.

Otros problemas:

52) Dos jugadores se ponen a jugar con la misma cantidad de dinero; el primero pierde 400 pesetas y el segundo gana 200, resultando que la cantidad que le queda la primero es la mitad de la que le queda al segundo. ¿Con cuánto dinero se pusieron a jugar?.

53) Un poste tiene bajo tierra 2/7 de su longitud, 2/5 del resto sumergido en agua, y la parte emergida mide 6 m. Halla la longitud del poste.
54) Una persona gasta la mitad de su jornal diario en alimentarse, y la tercera parte en otros gastos. Al cabo de 40 días ha ahorrado 6.000 pesetas. ¿Cuál es su jornal?.
55) En una reunión de jóvenes hay 26 chicas más que chicos. Al abandonar la fiesta 15 chicas y 15 chicos, quedan triple número de chicas que de chicos. ¿Cuántas chicas y cuántos chicos había al principio de la fiesta?.
56) En un corral hay conejos y gallinas. En total son 56 cabezas y 176 patas. ¿Cuántos conejos y gallinas hay?.